

ИЗГИБ ПЛИТЫ, ОПИРАЮЩЕЙСЯ НА УПРУГИЕ ДВУТАВРОВЫЕ БАЛКИ ПРИ НАГРЕВЕ

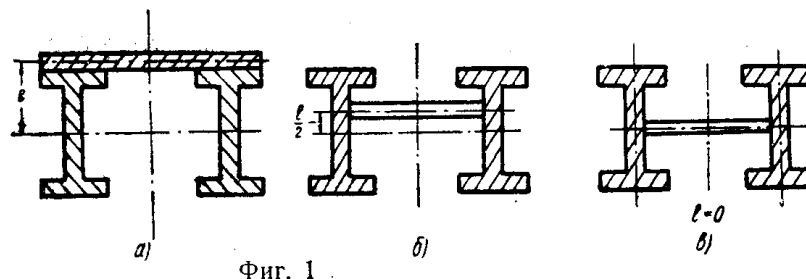
М. Г. ПИНСКИЙ

(Представлено научным семинаром кафедры сопротивления материалов).

Рассмотрим плиту, укрепленную на противоположных сторонах двутавровыми балками одинаковой жесткости; две другие стороны свободно оперты.

Задачей об изгибе квадратной плиты, опертой по краям на упругие балки занимались К. К. Чалышев [1], С. П. Тимошенко [2], Б. Г. Галеркин [3], Е. Мюллер [4], А. С. Калманок [9]. В 1953 Фукс [5] и [8] исследовали изгиб прямоугольной плиты на упругих опорах.

Во всех этих работах исследовался случай сочленения плиты с балкой, при котором плита лежит на балках (фиг. 1а).



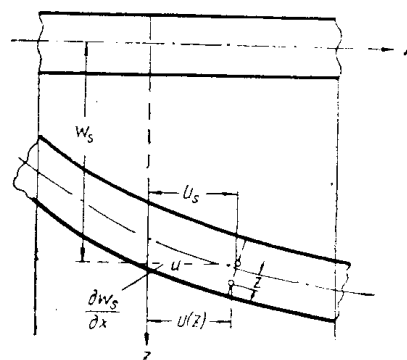
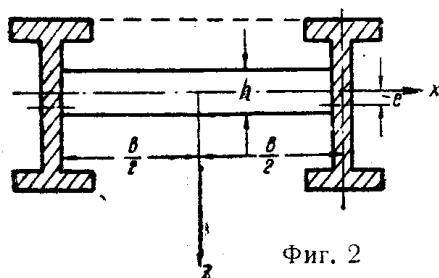
Мы рассмотрим случай произвольного по высоте балки сочленения с плитой (фиг. 2).

Под действием нагрузки плита деформируется (фиг. 3). Обозначая перемещения в направлении осей x , y , соответственно через u , v , w из фиг. 3 можно записать следующие соотношения:

$$u(z) = u_s - z \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad (1)$$

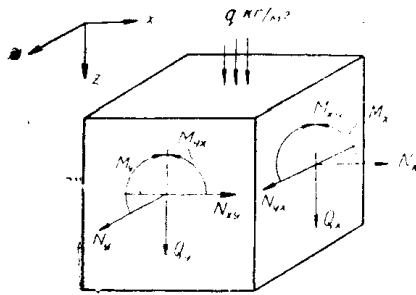
$$v(z) = v_s - z \frac{\partial w_s}{\partial y},$$

где u_s , v_s и w_s перемещения в срединной плоскости плиты.



Из уравнений Коши следует:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = (\varepsilon_{xx})_s - z \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = (\varepsilon_{yy})_s - z \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = (\varepsilon_{xy})_s - 2z \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (2)$$



Фиг. 4

Рассматривая равновесие бесконечного малого элемента плиты, введем в рассмотрение силы N_x , N_y и N_{xy} [2, стр. 90], отнесенные к единице длины (фиг. 4). Уравнение изгиба плиты имеет вид [2]:

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{D}, \quad (3)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ оператор Лапласа.}$$

Проектируя силы, лежащие в срединной плоскости на оси x и y , и, полагая, что объемные силы в этих направлениях отсутствуют, получим следующее уравнение равновесия

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Уравнения (4) аналогичны дифференциальным уравнениям равновесия в плоской задаче теории упругости [6], следовательно, уравнения (4) тождественно удовлетворяются, если положить

$$\begin{aligned}N_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \\ N_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ N_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},\end{aligned}\quad (5)$$

где φ — функция напряжения, определяемая бигармоническим уравнением

$$\Delta \Delta \varphi = 0. \quad (6)$$

Таким образом, напряженное состояние в плите характеризуется уравнениями (3) и (6), из которых можно определить w и φ . Расстояние оси балки от срединной плоскости плиты — e (фиг. 2). Предполагаем, что балки сопротивляются изгибу в вертикальной плоскости, не сопротивляясь кру-

чению и изгибу в горизонтальной плоскости. В этом отношении решение является приближенным. Строго говоря, следовало бы учесть изгибно-крутильную деформацию балки, что привело бы к весьма сложным выкладкам.

На каждом краю $x = \pm \frac{b}{2}$ можно записать следующие граничные условия, исходя из наших допущений (фиг. 5):

$$1. M_x = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (7)$$

$$2. N_x = 0, \quad -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Big|_{x=\pm \frac{b}{2}} = 0. \quad (8)$$

3. Давление в направлении оси Z является вертикальной нагрузкой на балку [2, стр. 96]

$$-V_x = D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (9)$$

и дифференциальное уравнение изогнутой оси балки принимает вид:

$$EJ_z \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]. \quad (10)$$

В центре тяжести балок приложены силы N_σ , которые можно найти из уравнения $\Sigma Y = 0$

$$2 N_\sigma + \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} N_y dx = 0. \quad (11)$$

Откуда, учитывая (5)

$$2 N_\sigma + \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx = 0, \quad (12)$$

$$N_\sigma = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Изгибающий момент в балке представим в виде двух слагаемых;

$$M_\sigma = M(q) + M(N_\sigma), \quad (13)$$

где $M(q)$ — изгибающий момент от нагрузки q и $M(N_\sigma) = -N_\sigma e$ — изгибающий момент от силы N_σ .

Известно, что для упругой оси балки можно записать:

$$EJ_z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -M_\sigma. \quad (14)$$

Продифференцировав (14) дважды по y , учитывая (13) и

$$\frac{d^2 M(q)}{dx^2} = -V_x$$

можно записать уравнение (14) в виде:

$$EJ_z \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{\partial^2 M_\sigma}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 M(q)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M(N_\sigma)}{\partial y^2}, \quad (15)$$

$$EJ_z w^{IV} = -V_x + e \frac{\partial^2 N_\sigma}{\partial y^2},$$

так как для Q_x принято положительное направление вниз, а реакция V_x от нагрузки на балку направлена вверх, то её следует считать отрицательной.

Имея ввиду (9), уравнению (15) можно придать следующий вид:

$$EJ_z \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \pm D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \mp e \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} \right). \quad (16)$$

4. Это граничное условие мы найдем из следующих соображений. Относительная деформация плиты и балки в направлении Y в месте стыка должна быть одинаковой. Деформация срединной плоскости в направлении оси Y -ов равна:

$$(\varepsilon_{yy})_s = \frac{N_y}{Eh} = \frac{1}{Eh} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (17)$$

Деформация $(\varepsilon_{yy})_s$ волокна балки на расстоянии e от оси, очевидно может быть определена из (2):

$$(\varepsilon_{yy})_e = (\varepsilon_{yy}) + e \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (18)$$

где ε_{yy} — относительное удлинение упругой оси балки или

$$(\varepsilon_{yy})_e = \frac{N_\sigma}{EF} + e \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (19)$$

из равенства деформаций следует:

$$(\varepsilon_{yy})_s = (\varepsilon_{yy})_e.$$

Учитывая (17) и (19), последнее условие запишем в следующем виде:

$$\frac{1}{Eh} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{N_\sigma}{EF} + e \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (20)$$

Для упрощения четвертого граничного условия, выражаемого уравнением (20), продифференцируем последнее дважды по y . Учитывая, что

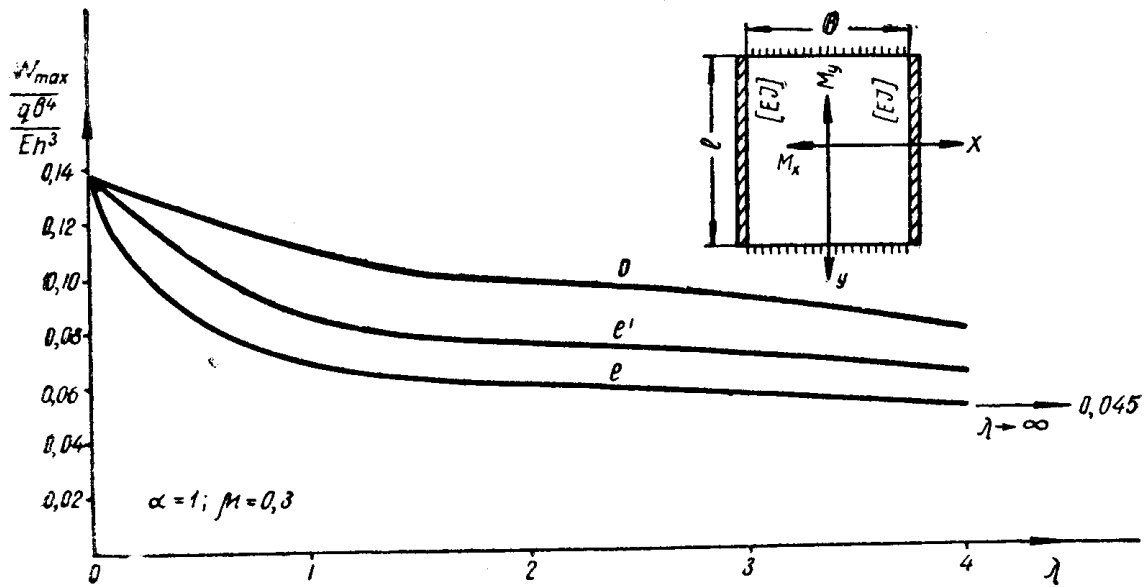
$$\text{при } x = \pm \frac{b}{2} \quad N_x = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \text{ и уравнение (12),}$$

запишем 4-е граничное условие (20) в таком виде:

$$\frac{1}{Eh} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = \pm \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} \right) \frac{1}{Eh} + e \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}. \quad (21)$$

Мы рассматриваем плиту (фиг. 5) длиной l , по краям $\left(x = \pm \frac{b}{2}\right)$, которой должны выполняться следующие условия:

а) $w = 0$, б) $M_y = 0$, в) $N_y = 0$, г) $N_x = 0$.



Фиг. 5

Решение поставленной задачи сводится, таким образом, к нахождению функций w и φ , удовлетворяющих соответственно уравнениям (3) и (6) и четырем вышеуказанным граничным условиям.

Решение уравнений (3) и (6) будем искать в виде [6];

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos \lambda_m x + B_m \lambda_m x \sin \lambda_m x + C_m) \sin \lambda_m y \quad (22)$$

$$\text{и } \varphi = \sum_{m=1}^{\infty} (D_m \cos \lambda_m x + K_m \lambda_m x \sin \lambda_m x) \sin \lambda_m y, \quad (23)$$

где

$$\lambda_m = \frac{m \pi}{l}.$$

Подставляя (22) и (23) в граничные условия (7), (8), (16) и (21), получим четыре уравнения для нахождения постоянных

$$A_m (1 - \mu) \cos \frac{\lambda_m b}{2} + B_m \left[\frac{\lambda_m b}{2} (1 - \mu) \sin \frac{\lambda_m b}{2} + \right. \\ \left. + 2 \cos \frac{\lambda_m b}{2} \right] = \mu C_m \quad (24)$$

$$D_m \cos \frac{\lambda_m b}{2} + K_m \frac{\lambda_m b}{2} \sin \frac{\lambda_m b}{2} = 0. \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
& A_m \left[EJ_z \lambda_m \cos \frac{\lambda_m b}{2} + (1 - \mu) \sin \frac{\lambda_m b}{2} \right] + \\
& + B_m \left[EJ_z \lambda_m^2 \frac{b}{2} \sin \frac{\lambda_m b}{2} - (1 - \mu) D \frac{\lambda_m b}{2} \cos \frac{\lambda_m b}{2} + \right. \\
& + (1 + \mu) \sin \frac{\lambda_m b}{2} \left. \right] - e D_m \sin \frac{\lambda_m b}{2} - e K_m \left(\frac{\lambda_m b}{2} \cos \frac{\lambda_m b}{2} + \right. \\
& \left. + \sin \frac{\lambda_m b}{2} \right) = - EJ_z \lambda_m C_m.
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
& A_m \cos \frac{\lambda_m b}{2} + B_m \left(\frac{\lambda_m b}{2} \sin \frac{\lambda_m b}{2} + 2 \cos \frac{\lambda_m b}{2} \right) + \\
& + D_m \left[\frac{\mu}{EFe} \cos \frac{\lambda_m b}{2} + \mu \frac{\sin \frac{\lambda_m b}{2}}{EF \lambda_m e} \right] + \\
& + K_m \left[\frac{\mu}{Ehe} \left(\frac{\lambda_m b}{2} \sin \frac{\lambda_m b}{2} + 2 \cos \frac{\lambda_m b}{2} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\mu}{EFe \lambda_m} \left(\frac{\lambda_m b}{2} \cos \frac{\lambda_m b}{2} + \sin \frac{\lambda_m b}{2} \right) \right] = 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

Подставляя (22) в (3), получим

$$\sum \lambda_m^4 C_m \sin \lambda_m y = \frac{q}{D}. \tag{28}$$

Для определения C_m умножим (28) на $\sin \frac{\kappa \pi y}{l} dy$ и проинтегрируем правую и левую части:

$$\int_{-l/2}^{+l/2} \sum \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 C_m \sin \frac{m\pi y}{l} \sin \frac{\kappa \pi y}{l} dy = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{q}{D} \sin \frac{\kappa \pi y}{l} dy.$$

Отсюда

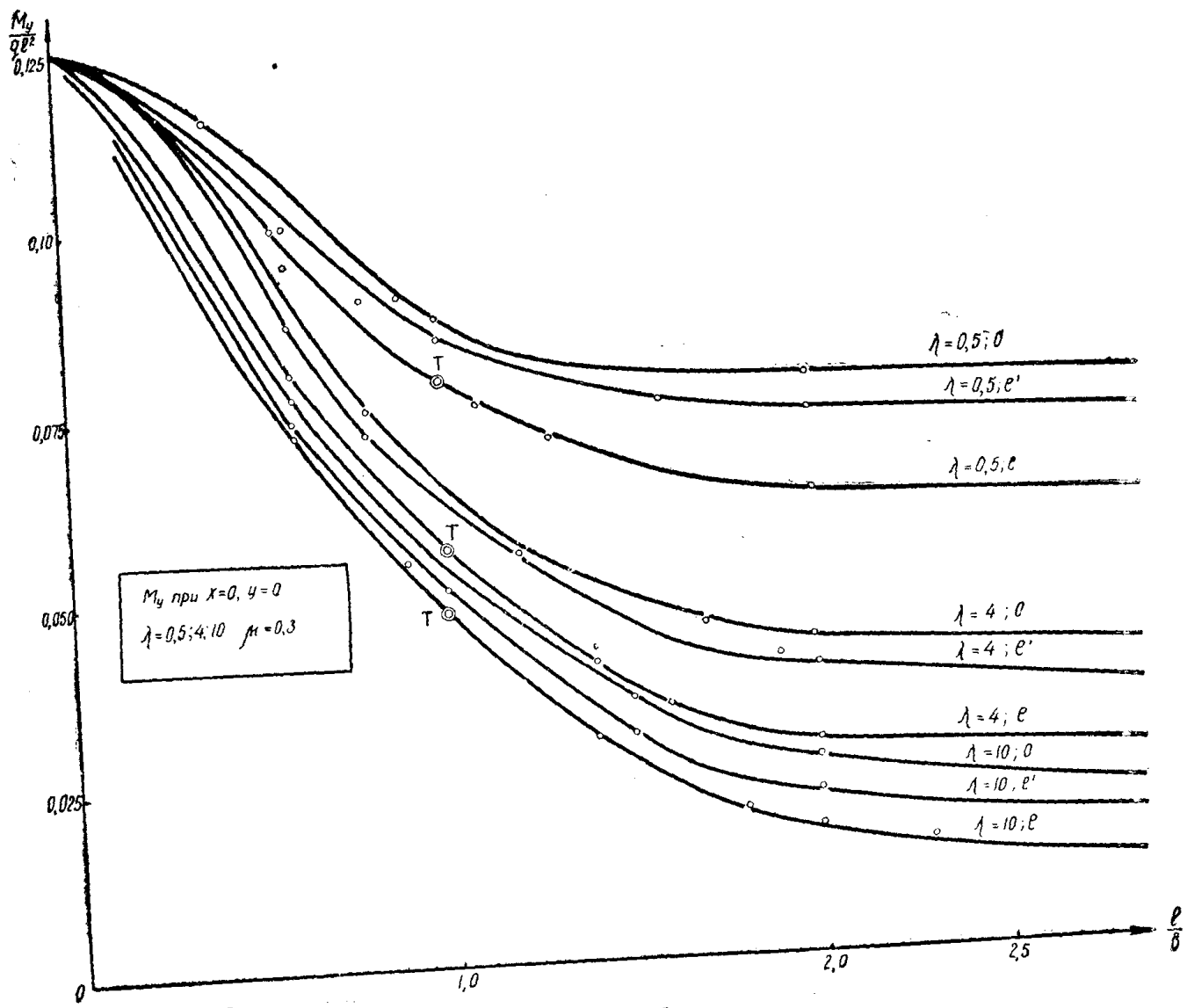
$$C_m = \frac{4 q l^4}{m^5 \pi^5 D} = \frac{q l^4}{78,5 m^5 D}. \tag{29}$$

Решая уравнения (24), (25), (26) и (27), определим постоянные A_m , B_m , D_m и K_m , которые ввиду громоздких выражений не приводим.

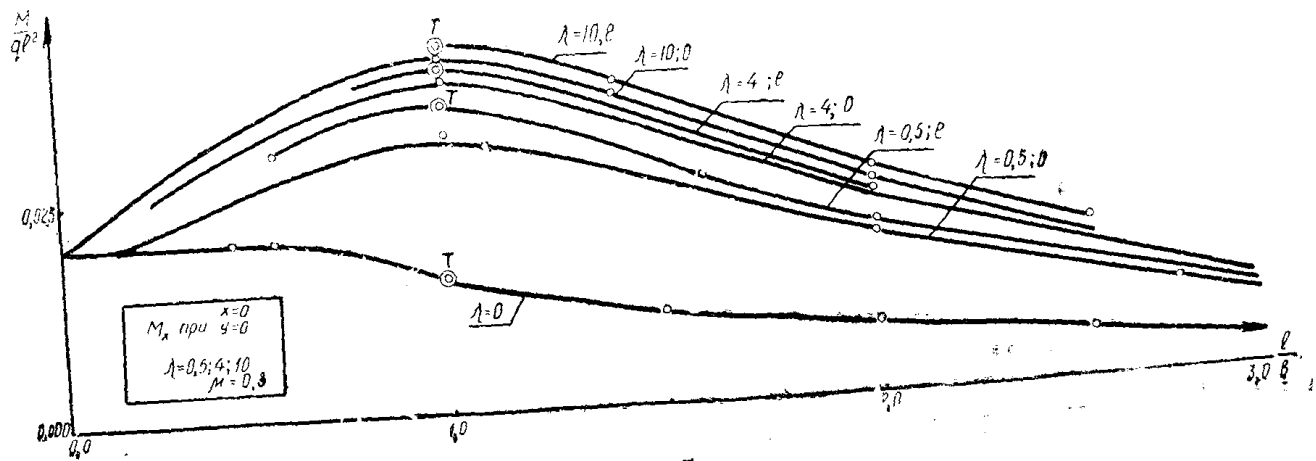
Запишем выражения для изгибающих моментов M_x и M_y [2]:

$$\begin{aligned}
M_x = D \sum_{1, 2, 3, \dots}^{\infty} \lambda_m^2 \left[(1 + \mu) A_m \cos \lambda_m x + (1 + \mu) B_m \lambda_m x \sin \lambda_m x - \right. \\
\left. - 2 B_m \cos \lambda_m x + \mu C_m \right] \cdot \sin \lambda_m y.
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
M_y = D \sum_{1, 2, 3, \dots}^{\infty} \lambda_m^2 \left[(1 + \mu) A_m \cos \lambda_m x + (1 + \mu) B_m \lambda_m \sin \lambda_m x - \right. \\
\left. - 2 \mu B_m \cos \lambda_m x + C_m \right] \cdot \sin \lambda_m y
\end{aligned} \tag{31}$$



Фиг. 6



Фиг. 7

и для продольных сил [2]

$$N_x = - \sum_1^{\infty} \lambda_m^2 (D_m \cos \lambda_m x + K_m \lambda_m x \sin \lambda_m x) \sin \lambda_m y. \quad (32)$$

$$N_y = - \sum_1^{\infty} \lambda_m^2 \cos \lambda_m x (D_m - K_m \lambda_m x \operatorname{tg} \lambda_m x) \sin \lambda_m y. \quad (33)$$

$$N_\phi = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \sum_1^{\infty} \left(- \lambda_m D_m \sin \frac{\lambda_m b}{2} + K_m \lambda_m \sin \frac{\lambda_m b}{2} - \right. \\ \left. - K_m \lambda_m^2 \frac{b}{2} \cos \frac{\lambda_m b}{2} \right) \sin \lambda_m y. \quad (34)$$

Вследствие весьма громоздких окончательных выражений для изгибающих моментов и продольных сил они в таком виде не могут быть использованы для практических расчетов.

Мы довели решение до численного результата. Наибольшие напряжения возникают вдоль оси X -ов.

Графики зависимостей W_{max} , M_x , M_y в зависимости от $\alpha = \frac{l}{b}$, $\lambda = \frac{EJ_z}{bD}$ и эксцентриситета e приведены на фиг. 5, 6, 7, 8 и 9.

Графики построены для стали ($\mu = 0,3$). Имея M_y , условие прочности можно записать в виде:

$$\sigma_{max} = \frac{6 M_y}{h^2} \leq (\sigma).$$

Следует отметить, что сравнение наших результатов с результатами работы акад. Б. Г. Галеркина [3, стр. 19, табл. 3], где был исследован частный случай квадратной плиты $\left(\frac{l}{b} = 1 \right)$ на упругих опорах, что со-

ответствует случаю, показанному на фиг. 1а, дает точное совпадение для значений M_y и M_x в центре плиты (см. кружочки с „Т“ фиг. 6, 7).

Сравнение результатов с результатами работы С. П. Тимошенко [2 стр. 215] и [9] также дает совпадение в частном случае квадратной плиты для w_{max} , M_y и M_x . Это совпадение результатов указывает на правильность полученных результатов рассмотренного более общего случая изгиба прямоугольной плиты, опирающейся на противоположных краях на упругие двутавровые балки.

Следует отметить, что при $\frac{l}{b} \rightarrow 0$ и $\frac{l}{b} \rightarrow \infty$, $n = 0$ (балки) изгибающий момент в центре $M_y = \frac{ql^2}{8}$, что совпадает с результатом, получаемым в сопротивлении материалов.

Сравнивая схемы расположения плиты относительно балок, видим, что наиболее неблагоприятным является расположение, приведенное на фиг. 1в ($e = 0$) и наимыгоднейшим — на фиг. 1а (e).

Заметим, что Такоумский мост (США), потерпевший крушение в 1940 г., имел расположение плиты, относительно балки, как показано на фиг. 18, т. е. наиболее неблагоприятное [7].

Анализ кривых (фиг. 5, 6, 7) показывает, что при соотношениях $\frac{EJ}{bD} = 4 \div 5$, обычно встречающихся на практике, влияние изгиба балок

на деформацию и напряжения плиты невелико ($10 \div 15\%$) и может не учитываться в практических расчетах. При меньших соотношениях это влияние оказывается весьма существенным ($80 \div 90\%$).

Следовательно, для увеличения жесткости и прочности плиты, опирающейся на упругие двутавровые балки, достаточно взять $\frac{EJ}{Db} = 4$; даль-

нейшее увеличение этого отношения не даст заметного эффекта.

Теперь к внешней нагрузке q добавим температурный фактор.

Пусть температура нижней $\left(z = +\frac{h}{2}\right)$ и верхней $\left(z = -\frac{h}{2}\right)$ плоскостей пластинки соответственно t_1 и t_2 , а разность $t_1 - t_2 = t$.

Так как пластинка, по условию, тонка, можно считать температуру меняющейся по толщине пластинки по линейному закону.

Как было отмечено, при $\frac{EJ}{Db} = 4 \div 5$ плита, опертая на упругие балки, практически может рассматриваться как шарнирно опертая по всему контуру.

Учитывая это важное положение, определение температурного прогиба проведем, следуя В. М. Майзелю.

В случае линейного температурного поля оказывается удобным для опертой пластинки использовать зависимости

$$M_t = \frac{E\alpha}{1-\mu} \frac{h^2}{12} t, \quad (a)$$

$$w_t = W_{M_t}, \quad (b)$$

согласно которым температурное перемещение в опертой плите совпадает с прогибом в ненагретой плите, вызванным изгибающим моментом M_t , равномерно распределенным вдоль контура.

Согласно замечанию С. П. Тимошенко [6], для ненагретой опертой по контуру прямоугольной в плане плиты прогиб $w_{M_t}(x, y)$ под действием равномерного распределенного вдоль контура изгибающего момента M_t совпадает с функцией напряжения кручения.

$$(\Delta \varphi = -2G\omega_0) \quad \text{при} \quad -2G\omega_0 = -\frac{M_t}{D}.$$

Поэтому при использовании соответствующего решения теории кручения получается значение прогиба W_{M_t} для ненагретой пластинки в виде:

$$W_{M_t} = \frac{8}{\pi^3} \frac{M_t b^2}{D} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{ch \frac{n\pi y}{b}}{ch \frac{n\pi l}{2b}} \right) \cos \frac{n\pi x}{b}.$$

Воспользовавшись теперь соотношениями (а) и (b), получаем искомый температурный прогиб для прямоугольной плиты, находящейся в линейном температурном поле

$$W_t(x, y) = \frac{8(1+\mu)}{\pi^3 h} b^2 \alpha t \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{ch \frac{n\pi y}{b}}{ch \frac{n\pi l}{2b}} \right) \cos \frac{n\pi x}{b}. \quad (35)$$

Известно, однако, что

$$\sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3} \cos \frac{n\pi x}{b} = \frac{\pi^3}{32} \left[1 - 4 \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right] \quad (c)$$

в чём можно убедиться, разложив правую часть в ряд Фурье.

Подставляя (с) в (35), получим

$$W_t(x, y) = \frac{(1+\mu) \alpha t}{h} \left[\left(\frac{b}{2} \right)^2 - x^2 \right] \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left(1 - \frac{ch \frac{n\pi y}{b}}{ch \frac{n\pi l}{2b}} \right). \quad (36)$$

В центре плиты температурный прогиб

$$W_t = \frac{(1+\mu) \alpha t b^2}{4 h} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{ch \frac{n\pi l}{2b}} \right). \quad (37)$$

Если $\frac{l}{b}$ велико, то

$$W_t = \frac{(1+\mu) \alpha t b^2}{4 h}. \quad (38)$$

Определив температурный прогиб, вычислим изгибающие и крутящие моменты

$$M_{yt} = -D \left[\left(\frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w_t}{\partial y^2} \right) + \alpha t \frac{1+\mu}{h} \right].$$

$$M_{xt} = -D \left[\left(\frac{\partial^2 w_t}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2} \right) + \alpha t \frac{(1+\mu)}{h} \right].$$

$$M_{(xy)t} = -M_{(yx)t} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w_t}{\partial x \partial y}.$$

Суммируя температурные прогибы, изгибающие и крутящие моменты с соответствующими значениями этих величин от нагрузки q , получаем суммарные значения прогиба плиты, изгибающих и крутящих моментов, по которым и ведём расчет плиты. Работа выполнена по заданию завода „Манометр“.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чалышев К. К. — К вопросу о расчете пластинок, лежащих на упругом контуре. Сборник института инженеров путей сообщения, вып. 87, 1914.
 2. Тимошенко С. П. — Пластины и оболочки, Гостехиздат, 1948.
 3. Галеркин Б. Г. — Собрание сочинений, том II АН СССР, 1953.
 4. Müller E. *Ingenieur-Archiv*, Bd. 2, 1932.
 5. Fuchs S. J. — Plates with boundary conditions of elastic support *Proceedings ASME* Vol. 79, № 199, 1953.
 6. Тимошенко С. П. — Теория упругости. Гостехиздат, 1934.
 7. Дмитриев Ф. Д. — Крушения инженерных сооружений. Москва, 1953.
 8. Gilg B. — *Schweizerische Bauzeitung* № 48, 1953.
 9. Калманок А. С. — Строительная механика пластинок. Машстройиздат, стр. 171—173, 1950.
-